

Selection Guaranteed here

Develop India Group

Visit at : <https://www.developindiagroup.co.in/>

You can find here

**Current Affairs | Latest Jobs | Syllabus | Admit
Cards | Question Papers | cut off |
Answer keys | Results**

Develop India Group India's largest online complete study notes providing website. We are providing complete study notes for UPSC Exams and all state civil services examinations like UPPSC, MPPSC, BPSC, JPSC, CGPSC, UKPSC, RAS/RTS etc. Except in these exams we are providing study notes for Judicial, IIT JEE, Engineering and medical entrance, GATE, CSIR, UGC NET, Banking, RRB and SSC exams.

Visit this site for more : <https://www.developindiagroup.co.in/>

(12)

Total No. of Printed Pages—12

4CCSME

गौस के अपसरण प्रमेय की व्याख्या करें और इसको फलन
 $\vec{F} = x^3\vec{i} + x^2\vec{j} + x^2z\vec{k}$
 के लिए सत्यप्रित करें जो बेलनी क्षेत्र $x^2 + y^2 = a^2$,
 $z=0$ और $z=b$ से दिए हैं।

(b) (i) Show that the vector

$$\vec{V} = (\sin y + z)\vec{i} + (x \cos y - z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$$

is irrotational.

प्रदर्शित करें कि सदिश

$$\vec{V} = (\sin y + z)\vec{i} + (x \cos y - z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$$

अवृद्धियाँ हैं।

(ii) Prove that

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r^n) = n(n+1)r^{n-2}$$

$$\text{where } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

सिद्ध करें कि

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r^n) = n(n+1)r^{n-2}$$

$$\text{जहाँ } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

For the curve $x = a(3u - u^3)$, $y = 3au^2$,

$z = a(3u + u^3)$, show that k and τ both
 are equal.

ब्रॉक $x = a(3u - u^3)$, $y = 3au^2$,

$z = a(3u + u^3)$ के लिए सिद्ध करें कि k और τ दोनों
 समान होते हैं।

★ ★

MATHEMATICS

गणित

PAPER—I

प्रश्न-पत्र—I

Full Marks : 200	Time : 3 hours
पूर्णांक : 200	समय : 3 घण्टे

The figures in the margin indicate full marks

हाइक्स में पूर्णांक दिए गए हैं

Candidates are required to answer five questions in which Question No. 1 is compulsory प्रश्नांकों को पॉच प्रश्नों के उत्तर देने हैं, जिसमें प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है।

1. Answer any five of the following questions : 8×5=40

निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर हैं :

- (a) If λ is non-zero eigenvalue of an invertible matrix A , then prove that $\lambda^{-1}(\det A)$ is an eigenvalue of $\operatorname{adj} A$.

यदि λ एक व्युक्तमणीय आव्यूह A का ऐसा अभिलक्षणिक मान है जो शून्य नहीं है, तो सिद्ध करें कि $\lambda^{-1}(\det A)$, A के सहबंदज आव्यूह ($\operatorname{adj} A$) का एक अभिलक्षणिक मान है।

(2)

- (b) Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ is diagonalizable and find a matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.
- दिखाएँ कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ किकणीय है
- तथा एक ऐसा आव्यूह P ज्ञात करें, जिससे $P^{-1}AP$ एक विकर्ण आव्यूह हो।
- (c) Evaluate :
- मान प्राप्त करें :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

- (d) Determine the point where the function $f(x, y) = x^3y^3 - 3axy$ has a maximum or a minimum value.

उन बिन्दुओं को निर्धारित करें, जहाँ पर फलन $f(x, y) = x^3y^3 - 3axy$ अधिकतम या न्मूकतम हो।

- (e) Show that $\operatorname{curl} \operatorname{grad} \phi = 0$.

- (f) Find the equation of the tangent planes to the hyperboloid $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ which passes through the straight line $x + 9y - 3z = 0 = 3x - 3y + 6z - 5$.

12Y—100/43

(11)

- (c) Show that the vector field defined by the vector function

$$\vec{V} = xyz(y\vec{z} + x\vec{z} + xy\vec{k})$$

is conservative.

10

दिखाएँ कि सदिश फलन

$$\vec{V} = xyz(y\vec{z} + x\vec{z} + xy\vec{k})$$

द्वारा परिभाषित जटिश क्षेत्र संरक्षी होता है।

- (d) Find the work done in moving the particle once round the ellipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, z=0$$

under the field of force given by

$$\vec{F} = (2x - y + z)\vec{i} + (x + y - z^2)\vec{j} + (3x - 2y + 4z)\vec{k}$$

$$\vec{F} = (2x - y + z)\vec{i} + (x + y - z^2)\vec{j} + (3x - 2y + 4z)\vec{k} \quad 10$$

द्वारा प्रदत्त बल-क्षेत्र के अधीन दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z=0$ के चारों ओर कण के एक बार घूमने में किए गए कार्य को मालूम करें।

10. (a) State Gauss divergence theorem and verify it for the function

$$\vec{F} = x^3\vec{i} + x^2\vec{j} + x^2\vec{k}$$

over the cylindrical region bounded by

$$x^2 + y^2 = a^2, z=0 \text{ and } z=b \quad 10$$

(Continued)

12Y—100/43

(Turn Over)

(10)

- (c) A lamina is totally immersed in fluid and is quadrant of a circle of radius a of which the centre is in the surface. Determine the locus of the centre of pressure in the lamina and find the length of the curve.

हुत के एक चतुर्थांश के आकार का पटल पूर्ण रूप से तरल में डूबा है। हुत का अर्द्धव्यास a तथा इसका केन्द्र, द्रव की सतह में है। पटल में दाढ़ केन्द्र का विकल्प निकालें तथा वक्र की लम्बाई बताएं।

9. (a) If a length s is divided into n equal parts such that at the end of each of these lengths acceleration of a moving particle is increased by f/n , find the velocity of the particle after describing the distance s , given that the particle started moving with acceleration f from rest.

लम्बाई s को n बाबरणों में इस प्रकार समरूपान्वित किया जाता है कि प्रत्येक भाग के अंत में गतिमान कण की वेग-वृद्धि f/n बढ़ जाती है। s दूरी चलने के बाद कण का ब्रा जात करें, जबकि गतिमान कण की प्रारम्भिक वेग शून्य तथा वेग-वृद्धि f है।

- (b) Deduce $y = c \cosh \frac{x}{c}$ for a common catenary.

एक साधारण रचनाक्रम के लिए निकालें

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

as a linear polynomial in A .

(3)

उन स्पर्शी समतलों के समीकरण ज्ञात करें जो अतिपरवलयज $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ को स्पर्श करते हैं और जो सीधी रेखा

$$x + 9y - 3z = 0 = 3x - 3y + 6z - 5$$

से होकर जाते हैं।

- (g) An ellipse is just immersed in water with its major axis vertical. Show that if the centre of pressure coincides with the focus, the eccentricity of the ellipse must be $\frac{1}{4}$.
एक दीर्घवृत्त ठीक पानी में डूबा हुआ है जिसका दीर्घाश उक्तव्याधि है। यदि दाढ़-केन्द्र नाभि के संपाती हो, तो सिद्ध करें की दीर्घवृत्त की उक्तेक्षता $\frac{1}{4}$ है।

- (h) Evaluate :
मान निकालें :

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x^2} (x^2 - xy) dx dy$$

2. (a) Find the eigenvalues of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ and verify Cayley-Hamilton theorem for this matrix. Find the inverse of the matrix A and also express $A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10I$

10

(4)

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ के अभिलक्षणिक मूल को ज्ञात करें

और कैले-हैमिल्टन प्रमेय को इस आव्यूह के लिए प्रमाणित करें। आव्यूह A का न्यूक्रमणीय आव्यूह ज्ञात करें तथा $A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10I$ को A

के एकपारी बहुपद के रूप में व्यक्त करें।

(b) Write the matrix A of the quadratic form

$$6x^2 + 65y^2 + 11z^2 + 4zx$$

Find the eigenvalues of A and prove also that the above quadratic form is positive definite.

10

द्विधाती रूप $6x^2 + 65y^2 + 11z^2 + 4zx$ के आव्यूह A को लिखें। A के अभिलक्षणिक मूल को ज्ञात करें तथा यह भी सिद्ध करें कि उपर्युक्त द्विधाती रूप निश्चित धनात्मक है।

If x, y, z are vectors in a vector space $V(F)$ such that $x+y+z=0$, prove that x and y span the same subspace as y and z .

10

यदि x, y, z सदिश समष्टि $V(F)$ के सदिश हैं तथा प्रकार कि $x+y+z=0$, तो सिद्ध करें कि x और y, y और z के जैसा ही उपसमष्टि स्पैन करते हैं।

(d) If U and W are subspaces of a finite-dimensional vector space $V(F)$, then show that

यदि U और W एक निश्चित विमा वाले सदिश समष्टि $V(F)$ के उपसमष्टि हों, तो दिखाएं कि

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

(9)

(b) Solve : 10
हल करें :

$$(3x+2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5(3x+2) \frac{dy}{dx} - 3y = x^2 + x + 1$$

(c) Find the directional derivative of the function $f = xy^2 + yz^2 + zx^2$ along the tangent to the curve $x=t, y=t^2, z=t^3$ at $(1, 1, 1)$.

$$\text{फलन } f = xy^2 + yz^2 + zx^2 \text{ का चक्र } x=t, y=t^2, z=t^3 \text{ पर दिशा-अवकलज ज्ञात करें।}$$

10

8. (a) A particle moves with a central acceleration $\mu(r^5 - 9r)$, being projected from an apse at a distance $\sqrt{3}$ with velocity $3\sqrt{2\mu}$. Show that its path is the curve $x^4 + y^4 = 9$.

10

दूसी $\sqrt{3}$ पर एक स्तरियका से जौगा $3\sqrt{2\mu}$ के साथ प्रश्नीयित किए जाने पर एक कण केन्द्रीय त्वरण $\mu(r^5 - 9r)$ के साथ चलता है। दिखाएं कि इसका पथ चक्र $x^4 + y^4 = 9$ है।

(b) Discuss the principle of virtual work for a system of coplanar forces. 10
समतली बलों के निकाय के लिए कल्पित कार्य के सिद्धान्त की व्याख्या करें।

(8)

$$\tan^{-1} \left(\frac{2e \sin \alpha}{1 - e^2} \right)$$

where a is the angle between the chord and axis.

PSP' शाक्त्र की एक नाभिय जीवा है। सिद्ध करें कि P और P' पर स्पर्श-खाऊँ के मध्यस्थ कोण है।

$$\tan^{-1} \left(\frac{2e \sin \alpha}{1 - e^2} \right)$$

जहाँ α जीवा और अक्ष के मध्य कोण है।

6. Solve the following :

निम्न को हल करें :

$$(i) \frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$$

$$(ii) p^3 - 4pxy + 8y^2 = 0$$

$$\text{where (जहाँ)} P = \frac{dy}{dx}$$

$$(iii) (x^3 y^3 + x^2 y^2 + xy + 1) y dx + (x^3 y^3 - x^2 y^2 - xy + 1) x dy = 0$$

$$(iv) (D^2 - 4D + 4)y = 8x^2 e^{2x} \sin 2x$$

$$\text{where (जहाँ)} D = \frac{d}{dx}$$

7. (a) Solve by the method of variation of parameter, the equation
निम्न समीकरण को वैरिएशन ऑफ पैरामीटर के नियम से हल करें

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x \log x$$

(5)

3. (a) Find the maximum value of $u = x^p y^q z^r$
when $ax + by + cz = p + q + r$.

$u = x^p y^q z^r$ का महतम मान निकालें, जबकि $ax + by + cz = p + q + r$.

- (b) Show that
सिद्ध करें कि

$$\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

- (c) With usual notation, prove the
following :
सामान्य संकेतन की सहायता से निम्नालिखित को सिद्ध करें :

$$(i) \int_0^a x^3 (2ax - x^2)^{3/2} dx \\ = a^7 \left(\frac{9\pi}{32} - \frac{23}{55} \right) > 0$$

$$(ii) \Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma(2m),$$

where (जहाँ) $m > 0$

4. (a) Show that every continuous function is Riemann-integrable and every bounded monotonic function is also Riemann-integrable.

दिखाएं कि प्रत्येक संतत फलन रीमान-समाकलनीय है तथा प्रत्येक परिबद्ध एकदिष्ट फलन भी रीमान-समाकलनीय है।

(6)

(b) Discuss the convergence of the following integral :

10

निम्न समाकलन के अधिकरण की विवेचना करें :

$$\int_a^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \text{ where } a > 0.$$

(c) Compute

$$\iint (x+y)^2 dx dy$$

over the region determined by

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

शात करें

$$\iint (x+y)^2 dx dy$$

उस प्रदेश पर जो कि निर्धारित होता है

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

10

(d) Show that the area between the curve $y^2(2a-x) = x^3$ and its asymptote is

$$3\pi a^2.$$

10

मिछ करें कि वक्त $y^2(2a-x) = x^3$ एवं इसके अनन्तस्थिरी के बीच का क्षेत्र $3\pi a^2$ है।

5. (a) Show that the plane $x+y-2z=3$ cuts the sphere $x^2+y^2+z^2-x+y=2$ in a circle of radius 1 and find the equation of the sphere which has this circle as a great circle.

13

(7)

दिखाएँ कि समतल $x+y-2z=3$ गोलक $x^2+y^2+z^2-x+y=2$ को विन्या 1 के वृत्त में काटता है और उस गोलक का समीकरण ज्ञात करें जिसमें यह वृत्त एक वृहत् वृत्त होता है।

(b) Prove that for all values of λ , the normals to the conicoid

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$$

which passes through a given point (α, β) meet the plane $z=0$ in points on the conic

$$(b^2 - c^2)\beta x + (c^2 - a^2)\alpha y + (a^2 - b^2)xy = 0, z=0$$

सिद्ध करें कि λ के सभी मानों के लिए शांकवज

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$$

के बीच अभिलम्ब, जो एक दिए हुए विन्द (α, β) से गुजरते हैं, समतल $z=0$ से उन बिन्दुओं पर मिलते हैं जो शांकव

$$(b^2 - c^2)\beta x + (c^2 - a^2)\alpha y + (a^2 - b^2)xy = 0, z=0$$

पर हैं।

(c) PSP' is a focal chord of a conic. Prove that the angle between the tangents at P and P' is

MATHEMATICS

गणित

PAPER-II

प्रश्न-पत्र—II

Full Marks : 200	Time : 3 hours
पूर्णांक : 200	समय : 3 घण्टे

The figures in the margin indicate full marks

हाइलाइट में पूर्णांक दिए गए हैं

Candidates are required to answer **five** questions, selecting at least **one** from each Section परीक्षार्थियों को प्रत्येक भाग से कन-से-कम एक प्रश्न चुनते हुए कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर देने हैं

SECTION—A

भाग—क

1. (a) Prove that the set \mathbb{Z} of integers is an infinite Abelian group for the binary composition * defined by $a * b = a + b + 1$.

सिद्ध करें कि पूर्णांक का समुच्चय \mathbb{Z} , बाइनरी कम्पोजिशन *, $a * b = a + b + 1$ के सापेक्ष एक अनन्त अबेलियन ग्रुप है।

(2)

- (b) Prove that if H be a subgroup of a finite group G , then the order of G is a multiple of the order of H .

यदि H एक सीमित ग्रुप G का सबग्रुप है, तो सिद्ध करें कि G का ऑर्डर, H के ऑर्डर का गुणांक है।

15

- (c) A subgroup H of a group G is normal subgroup of G iff product of two right cosets of H in G is again a right coset of H in G . Prove it.

किसी दो ग्रुप G का एक सबग्रुप H , G का नोर्मल सबग्रुप है, यदि और केवल यदि, G में H के दो दाहिने कोसेट का जुड़नफल G में H का दाहिना कोसेट है। सिद्ध करें।

12½

2. (a) Prove that a ring R is without divisor of zero if and only if the cancellation laws for multiplication holds in R .

10

सिद्ध करें कि कोई रिंग R में शून्य के भाजक नहीं होते, यदि और केवल यदि, रिंग R में कैसिलेशन लॉ सत्य होता है।

- (b) If p is prime and m , a +ve integer such that p^m divides $O(G)$, then prove that there exists a subgroup H of G such that $O(H) = p^m$.

10

यदि p एक लूढ़ संख्या है और m एक धनात्मक पूर्णांक इस तरह है कि p^m , $O(G)$ को विभाजित करता है, तो सिद्ध करें कि G का एक सबग्रुप H ऐसा मिलेगा कि $O(H) = p^m$.

(19)

- (c) Show that dual of a lattice is a lattice.

10

सिद्ध करें कि किसी लैटिस का इअल भी लैटिस है।

- (d) If L is a distributive lattice and if b' be the complement of an element b in L and $a \wedge b' = 0$, then show that $a \leq b$.

10

यदि L एक डिस्ट्रीब्यूटिव लैटिस और b' पलिमेट b का कॉम्प्लीमेंट L में है, और $a \wedge b' = 0$ है, तो दिखाएं कि $a \leq b$.

- (d) Prove that the connected graph G has a Hamiltonian circuit if for any two vertices u and v which are not adjacent, $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, where n is the number of vertices.

सिद्ध करें कि कनेक्टेड ग्राफ G का हैमिल्टोनियन सर्किट होगा, यदि वैसे दो वर्टिसेस u और v जो अगल-बगल न हों, के लिये $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, जहाँ n वर्टिसेस की संख्या है।

16. (a) If p and q are two statements, then show that $p \oplus q$ is equivalent to $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$.
यदि p और q दो कथन हैं, तो सिद्ध करें कि $p \oplus q$, $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ के समतुल्य है।

- (b) In a certain town, all cars marked P belong to the police. The cars are not fitted with the wireless unless they are marked P . The police has no blue cars. Prove by using the Boolean algebra that no blue cars are fitted with the wireless.
किसी शहर में ऐसे सभी कार जिनमें P का चिह्न है पुलिस के हैं। वैसे कार जिनमें P का चिह्न नहीं है वायरलेस से युक्त नहीं है। पुलिस के पास कोई नीली कार नहीं है। पुलिस एवं लैनेब्रा की सहायता से सिद्ध करें कि किसी भी नीली कार में वायरलेस नहीं है।

- (c) Prove that every Euclidean domain is a principal ideal domain but the converse is not necessarily true.

10

सिद्ध करें कि प्रत्येक युक्तीडियन डोमेन एक प्रिमिपल आइडियल डोमेन है किन्तु इसका विपरीत सत्य नहीं है।

- (d) If K is a finite extension of a finite field F and L is a finite field extension of K , then prove that—

- (i) L is a finite field extension of F ;
(ii) $[L : F] = [L : K][K : F]$.
यदि K , फाइलॉट फील्ड F का फाइलॉट एक्सटेंशन है और L , K का फाइलॉट एक्सटेंशन है, तो सिद्ध करें—
(i) L , F का एक फाइलॉट फील्ड एक्सटेंशन होगा;
(ii) $[L : F] = [L : K][K : F]$.

10

सिद्ध करें कि प्रत्येक युक्तीडियन डोमेन एक प्रिमिपल आइडियल डोमेन है किन्तु इसका विपरीत सत्य नहीं है।

- (i) L is a finite field extension of F ;
(ii) $[L : F] = [L : K][K : F]$.

3. (a) Show that the function $f(z) = e^{-z^{-4}}$ ($z \neq 0$) and $f(0) = 0$ is not analytic at $z = 0$ although the Cauchy-Riemann equations are satisfied at the point.

दिखाएं कि

$$f(z) = e^{-z^{-4}} \quad (z \neq 0)$$

$f(0) = 0$ पर एकात्मिक नहीं है, हालांकि $z = 0$ पर कोशी-सिमन समीकरण संतुष्ट होता है।

(4)

- (b) If $f(z)$ is analytic within and on a closed contour C and if z_0 is any point within C , then prove that

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

the integration around C being taken in positive sense.

यदि $f(z)$ किसी बन्द कॉर्ड C पर या उसके अंदर एनालिटिक है और z_0 , C के अंदर एक बिंदु है, तो सिद्ध करें कि

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

- (c) If $w = \tan^2 \frac{z}{2}$, then show that the strip in the z -plane between $x = 0$ and $x = \frac{\pi}{2}$ is mapped onto the interior of the unit circle in w -plane, cut along the real axis from $w = -1$ to $w = 0$.

15

यदि $w = \tan^2 \frac{z}{2}$, तो दिखाएं कि z -प्लैन में $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ के बीच की पट्टी w -प्लैन के इकाई वृत्त की भीतरी क्षेत्र जिसमें $w = -1$ से $w = 0$ तक वास्तविक अक्ष शामिल है, में मैप करता है।

4. (a) If z_1 is a point inside the circle of convergence $|z - z_0| = R$ of a power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, then prove that the series is uniformly convergent in the closed disk $|z - z_0| \leq R_1$, where $R_1 = |z_1 - z_0|$. 12½

12Y—100/44

(Continued)

(17)

यदि बोर्डस केन्द्र ब्रेलन के अन्दर है, तो यह स्थिर होगा यदि इनमें से किसी एक की दूरी केन्द्र से $(\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{2}} a$ होगी, जबकि a बेलन की त्रिज्या है।

- (c) Derive Navier-Stokes equation for viscous incompressible fluid. 15

विस्कस इकॉम्प्रेसिबल द्रव के लिए नेवियर-स्टोक्स समीकरण निकालें।

15. (a) Prove that a simple graph with n vertices and k components cannot have more than $\frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1)$ edges. 10

सिद्ध करें कि किसी सिम्प्ल ग्राफ जिसका n वर्टेस है तथा k कॉम्पोनेंट्स हैं के $\frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1)$ से अधिक एजेस नहीं हो सकते हैं।

- (b) Show that the maximum number of edges in a complete bipartite graph with n vertices are $\frac{n^2}{4}$. 10

दिखाएं कि किसी कॉम्प्लिट बाइपार्टाइट ग्राफ जिसमें n बर्टिसेस हैं एजेस कि अधिकतम संख्या $\frac{n^2}{4}$ होगी।

- (c) Prove that an indirected graph G is Eulerian if and only if it is connected and each vertex has even degree. 10

सिद्ध करें कि एक इनडाइरेक्ट ग्राफ G यूलेरियन होगा, यदि और केवल यदि, यह कनेक्टेड हो और प्रत्येक वर्टेस का डिग्री सम हो।

12Y—100/44

(Turn Over)

(16)

एक वृत्ताकार बेलन किसका जड़त्व-केन्द्र उसके अक्ष से c दूरी पर है, एक क्षेत्रिज तल पर घुटता है। यदि यह अस्थायी संतुलन की स्थिति से गतिमान होता है, तो दिखाएँ कि जबकि जड़त्व-केन्द्र मिन्नतन स्थिति में है, तो तल का नार्मिल गिरावचन इसके भार का $\left[1 + \frac{4c^2}{(a-c)^2 + k^2} \right]$ गुना है, जहाँ k बेलन के सेन्टर ऑफ मास से गुज़रते हुए अक्ष के परिवर्तन रेडियस आफ जायेश्वन है।

14. (a) Show that the velocity field

$$u(x, y) = \frac{A(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v(x, y) = \frac{2Axy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad w = 0$$

satisfies the equation of motion for inviscid incompressible flow. Determine the pressure associated with this velocity field.

दिखाएँ कि बेलोस्टी फील्ड

$$u(x, y) = \frac{A(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v(x, y) = \frac{2Axy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad w = 0$$

किसी इनविसिड इनकॉम्प्रेसिबल द्रव की गति के समीकरण को संतुष्ट करता है। इस बेलोस्टी फील्ड से सम्बन्धित दबाव को ज्ञात करें।

(b) If a vortex pair is situated within a cylinder, show that it will remain at rest if the distance of either from the centre is given by $(5(-2)^{\frac{1}{2}} a)$, where a is the radius of the cylinder.

12Y—100/44

(Continued)

(5)

पावर सिरिज $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ के केन्द्राभिमुख वृत्त $|z - z_0| = R$ के अद्वय z_1 एक बिन्दु है, तो सिद्ध करें कि यह पावर सिरिज क्लोज डिस्क $|z - z_0| \leq R_1$, जहाँ $R_1 = |z_1 - z_0|$, के यूनिफॉर्मली केन्द्राभिमुख होगा।

(b) State whether the following functions have isolated singularity or not : 12½
बताएँ कि निम्न फलनों के आइसोलेटेड सिंगलैरिटी हैं अथवा नहीं :

$$(i) f(z) = \log z$$

$$(ii) f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi z}{2})}$$

(c) Find the general bilinear transformation which transforms the unit circle $|z| \leq 1$ in the z -plane onto the unit circle $|w| \leq 1$ in the w -plane.

उस व्यापक बाइलीनियर द्रास्तव्यांप्रेशन को ज्ञात करें जो कि z -प्लैन के इकाई वृत्त $|z| \leq 1$ की w -प्लैन के वृत्त $|w| \leq 1$ में मैप करे।

5. (a) Use simplex method to solve the linear programming problem : 12½
Maximize $Z = 5x_1 + 3x_2$
subject to constraints
 $3x_1 + 5x_2 \leq 15$
 $5x_1 + 2x_2 \leq 10$
 $x_1, x_2 \geq 0$

(Turn Over)
12Y—100/44

(6)

सिम्प्लेक्स रीति का प्रयोग करते हुए निम्न ऐलिंक प्रक्रमन समस्या का हल ज्ञात कीजिए :

अधिकतम करें $Z = 5x_1 + 3x_2$

प्रतिबन्धों के साथ

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(b) Solve the following LP problem graphically : 12½

Maximize $Z = 8000x_1 + 7000x_2$

subject to constraints

$$3x_1 + x_2 \leq 66$$

$$x_1 + x_2 \leq 45$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

निम्नलिखित LP प्रब्लैम को ग्राफिकली हल करें :

अधिकतम करें $Z = 8000x_1 + 7000x_2$

प्रतिबन्धों के साथ

$$3x_1 + x_2 \leq 66$$

$$x_1 + x_2 \leq 45$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(15)

किसी दूर शहर में कार से जाने का औसत समय c घण्टा है जबकि बस से जाने में औसत समय b घण्टा है। एक व्यक्ति यह नियन्त्रण नहीं कर पा रहा है कि कार से जाए या बस से जाए। इसलिए वह एक सिक्का को उछालकर नियंत्रण लेता है। उसका आनुमानिक यात्रा-समय क्या होगा?

13. (a) Deduce the principle of energy from Lagrange's equations. 12½

(b) A particle of mass m moves in a force field of potential V . Write Hamilton's equations in spherical polar coordinates. 12½

एक बलशेत्र जिसका गोट्टेनियल V है, में m यात्रा का एक बस्तु गति में है। स्फेरिकल पोलर नियामक में हमिल्टोनियन समीकरण लिखें।

(c) A circular cylinder, whose centre of inertia is at a distance c from axis, rolls on a horizontal plane. If it be just started from a position of unstable equilibrium, show that the normal reaction of the plane when the centre of mass is in its lowest position is $\left[1 + \frac{4c^2}{(a-c)^2 + k^2} \right]$ times its weight, where k is the radius of gyration about an axis through the centre of mass.

15

(14)

12. (a) Find the probability that a single toss of a die results in a number less than 4, if
 (i) no other information is given and,
 (ii) it is given that the toss resulted in an odd number.
- किसी डाई के एक उछाल में 4 से कम अंक आने की प्रायिकिटी क्या होगी, यदि (i) कोई अन्य सूचना नहीं है,
 (ii) वह दिया हुआ है कि जो अंक आया वह एक विषम संख्या है।

- (b) The probability density function of a random variable X is given by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Find the variance of the random variable X .

किसी यादृच्छिक चर X का प्रॉबेबिलिटी डेसिटी फंक्शन निम्न है :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

यादृच्छिक चर X का वेरिएस ज्ञात करें।

- (c) The average travel time to a distant city is c hours by car or b hours by bus. A man cannot decide whether to drive or take the bus, so he tosses a coin. What is his expected travel time? 15

(7)

12. (a) Find the probability that a single toss of a die results in a number less than 4, if
 (i) no other information is given and,
 (ii) it is given that the toss resulted in an odd number.

किसी डाई के एक उछाल में 4 से कम अंक आने की प्रायिकिटी क्या होगी, यदि (i) कोई अन्य सूचना नहीं है,
 (ii) वह दिया हुआ है कि जो अंक आया वह एक विषम संख्या है।

- (b) The probability density function of a random variable X is given by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Find the variance of the random variable X .

किसी यादृच्छिक चर X का प्रॉबेबिलिटी डेसिटी फंक्शन निम्न है :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

यादृच्छिक चर X का वेरिएस ज्ञात करें।

- (c) Use duality to solve the following : 15

$$\text{Minimize } Z = 3x_1 + x_2$$

subject to constraints

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 > 0$$

द्वेष्ठाता सिद्धान्त का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित ऐविक प्रक्रम समस्या को हल करें :

$$\text{मूलम करें } Z = 3x_1 + x_2$$

प्रतिबन्धों के साथ

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 > 0$$

6. (a) A departmental head has 4 subordinates and 4 tasks to be performed. The subordinates differ in efficiency and the tasks differ in their intrinsic difficulty. His estimates of the times each man would take to perform each task is given in the effective matrix below. How should the tasks be allocated one to a man so as to minimise the total man-hour?

15

Subordinates

	I	II	III	IV
A	8	26	17	11
B	13	28	4	26
C	38	19	18	15
D	19	26	24	10

(8)

किसी विभागाध्यक्ष के अधीन 4 सहायक हैं जिनमें 4 कार्य करने हैं। सहायकों की भिन्न-भिन्न कार्य करने की क्षमता भिन्न-भिन्न है। कार्यों की प्रकृति भी भिन्न-भिन्न है। प्रत्येक सहायकों के भिन्न-भिन्न कार्य करने की अवधि निम्न एफेक्टिव आवृद्धि द्वारा प्रदर्शित है। इन कार्यों को सहायकों के बीच किस तरह से वितरित किया जाए कि कार्य पूरा करने में चूनतम मानव-घटे लगें?

		सहायक				
		I	II	III	IV	
Warehouse →	Factory ↓	A	8	26	17	11
		B	13	28	4	26
Warehouse requirement	Factory ↓	C	38	19	18	15
		D	19	26	24	10

(b) Find the initial basic feasible solution of the following transportation problem : 15

Warehouse →	W ₁	W ₂	W ₃	W ₄	Factory capacity
F ₁	19	30	50	10	7
F ₂	70	30	40	60	9
F ₃	40	8	70	20	18
Warehouse requirement	5	8	7	14	34

निम्नलिखित यातायात समस्या के इनीशियल बेसिक फीसिबल सल्यूशन को ज्ञात करें :

गोदाम →	W ₁	W ₂	W ₃	W ₄	फैक्ट्री क्षमता
फैक्ट्री ↓					
F ₁	19	30	50	10	7
F ₂	70	30	40	60	9
F ₃	40	8	70	20	18
गोदाम मात्रा	5	8	7	14	34

(13)

- (i) Find the value of the constant c. 12½
(ii) Find $P(X \geq 3, Y \leq 2)$.
दो सतत यादृच्छिक चर X एवं Y का सुलभ प्रबंबिती डेसिटी फक्शन मिम है :

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^y, & 0 < x < 4, 1 < y < 5 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

- (i) स्थिरांक c का मान ज्ञात करें।

- (ii) $P(X \geq 3, Y \leq 2)$ ज्ञात करें।

(c) Ten percent of the tools produced in a certain manufacturing process turn out to be defective. Find the probability that in a sample of 10 tools chosen at random exactly two will be defective by using—

- (i) the binomial distribution;
(ii) the Poisson approximation of the binomial distribution. 15
- किसी औजार निर्माण के क्रम में यह देखा जाता है कि 10 प्रतिशत औजार दोषुक हैं। 10 औजार के यादृच्छिक चुनाव में मात्र दो के दोषुक होने की प्रायोबलिटी क्या होगी, यदि—

- (i) जाइनोमियल डिस्ट्रिब्यूशन ले तो;
(ii) जाइनोमियल डिस्ट्रीब्यूशन को पर्याप्त एक्सिमेशन ले तो।

(12)

- (b) Find the necessary and sufficient conditions for integrability of single differential equation
 $Pdx + Qdy + Rdz = 0.$ 12½
- (c) Using the method of separating variables, solve

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \text{ where } t > 0, 0 \leq x \leq 1$$

सेपरेटिंग वेरिएबल मेथड से हल करें

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \text{ जहाँ } t > 0, 0 \leq x \leq 1$$

11. (a) A ball is drawn at random from a box containing 6 red balls, 4 white balls and 5 blue balls. Determine the probability that it is (i) red, (ii) white, (iii) not red. 12½
 एक बक्स से, जिसमें 6 लाल, 4 सफेद तथा 5 नीले गेंद हैं, एक गेंद यादृच्छिक निकाला जाता है। इसके (i) लाल होने की, (ii) सफेद होने की, (iii) लाल न होने की प्रायिकती ज्ञात करें।

- (b) The joint probability density function of two continuous random variables X and Y is

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & 0 < x < 4, 1 < y < 5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

12Y—100/44

(9)

- (b) Find Poisson arrivals with mean arrival rate λ and exponential service time with mean rate μ , prove that

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n, \text{ where } n \geq 0$$

पॉयसन एराइवल जिनका एराइवल दर का माध्य λ एवं एक्सपोनेनशियल सर्विस समय दर का माध्य μ हो, तो सिद्ध करें कि

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n, \text{ जब } n \geq 1$$

7. (a) Prove that half-life or period of the population decreases as the excess of death rate over birthrate increases. 12½
 सिद्ध करें कि जनसंख्या की अर्द्ध-जीवन या अवधि कम होती जाती है, यदि शृंखला, जन्मदर से बढ़ती जाती है।
 (b) State and prove age-structured population model. 12½
 एज-स्ट्रक्चर्ड पॉपुलेशन मॉडल का कथन दे और सिद्ध करें।

- (c) Derive a thematical model for diabetes mellitus by ordinary differential equations.

आईडीनरी हिफेजियल इवेशन की सहायता से डायबीटीज मेलिटस का सेढान्टिक मॉडल निकालें।

12Y—100/44

(Continued)

(Turn Over)

(10)

8. (a) Discuss the stability of the equilibrium positions $(0, 0)$ and $(p/q, a/b)$ for the prey-predator models.

प्रे-प्रीडेटर मॉडल के $(0, 0)$ एवं $(p/q, a/b)$ पर संतुलन के स्थायित्व की विवेचना करें।

- (b) Find out the number of susceptibles $S(t)$ and infected persons $I(t)$ by simple epidemic mode.

सामान्य एपिडेमिक मॉडल से ग्राहका की संख्या $S(t)$ तथा संक्रमित व्यक्तियों की संख्या $I(t)$ को ज्ञात करें।

- If $N(t)$ be the number of companies which have adopted a technological innovation till time t and R is the total number of companies in the region, then find the relation between N and R .

यदि किसी क्षेत्र में कुल कम्पनियों की संख्या R है जिनमें $N(t)$ वैसी कम्पनियों की संख्या है जिन्होंने t समय तक तकनीकी खोज का अंगीकार किया है, तो N एवं R में सम्बन्ध ज्ञात करें।

SECTION—B

भाग—ख

9. (a) Find the differential equation of all surfaces of revolution having z -axis as the axis of rotation.

10

सेफेस ऑफ रोलटूशन जिसका एक्सिस ऑफ रोलेशन z -एक्सिस है, का डिफरेंशियल इक्वेशन ज्ञात करें।

(11)

- (b) Solve :

$$\left(\frac{y^2 z}{x} \right) p + xzq = y^2$$

where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial z}{\partial y}$

10

- हल करें :

$$\left(\frac{y^2 z}{x} \right) p + xzq = y^2$$

जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ और $q = \frac{\partial z}{\partial y}$

- (c) Solve :

हल करें :

$$x(y^2 + z)p - y(x^2 + z)q = z(x^2 - y^2)$$

- (d) Use Charpit's method to find the complete integral of $px + qy = pq$.

10

चारपिट के नेथड से निम्न का कल्पित इक्विल निकालें :

$$px + qy = pq$$

$$x(y^2 + z)p - y(x^2 + z)q = z(x^2 - y^2)$$

10. (a) Find the orthogonal trajectories of the system of circles touching a given straight line at a given point.

12½

दिए हुए इत्त समूह जोकि किसी संतल रेखा को एक बिन्दु पर स्पर्श करते हैं, का लाभात्मक चक्र ज्ञात करें।